IV.5. Eindeutigkeit von Lsgn.

Oft: Eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Bsp. Poisson-Gl. in 3 Dim:

$$\Delta u(\vec{r}) = \tilde{\rho}(\vec{r})$$

(alle phys. Konstanten in $\tilde{\rho}$ absorbiert)

Thm: Sei u reell, 1te und 2te Ableitungen von u stetig in einem Gebiet V und auf dessen Rand S.
Es gelte $\Delta u = \tilde{\rho}$ in V und
entweder $u = f$ auf S (Dirichlet)
oder $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ auf S (Neumann). [f, g gegeben]
Dann ist u eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Bew: Annahme: Es gibt zwei verschiedene Lsgn u_1, u_2.
$w := u_1 - u_2$.

$\Rightarrow \Delta w = \Delta u_1 - \Delta u_2 = \tilde{\rho} - \tilde{\rho} = 0$ (Laplace-Gl. in V)

Da $u_1 = f = u_2$ oder $\frac{\partial u_1}{\partial n} = g = \frac{\partial u_2}{\partial n}$ auf S $\Rightarrow$
$w = 0$ oder $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ auf S.

1. Green'scher Satz:

$$\int_V \Big[w \underbrace{\Delta w}_{=0} + (\nabla w)\cdot(\nabla w) \Big] dV = \int_S w \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0$$

$$\Rightarrow \int_V |\nabla w|^2 dV = 0$$

das geht nur wenn $\nabla w = \vec{0}$ in V, also
wenn $w = u_1 - u_2$ eine Konstante ist.

Dirichlet: $u_1 \equiv u_2$ auf S (oder einem Teil von S)
$\Rightarrow$ $w \equiv 0$ und $u_1 \equiv u_2$ in ganz V.

Neumann: u_1 und u_2 können sich um eine Konstante unterscheiden.

Bem.: Hat man eine Lsg. gefunden, wie auch immer, dann ist sie korrekt, da eindeutig.
Ähnlich kann man die Eindeutigkeit für andere PDEs zeigen.

V. Separation der Variablen

Statt $u(x,y,z,t) = f(\rho)$, $\rho=\rho(x,y,z,t)$
zu schreiben und ρ zu suchen, nehmen wir nun an, dass

$$u(x,y,z,t) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,T(t) \qquad \underline{\text{Produktansatz}}$$

(in kartesischen Koord.).

Eine Lsg von dieser Form heißt separabel in x,y,z,t.

Bsp: $xyz^2\sin(bt)$ ist vollst. separabel
$(x^2+y^2)\,z\cos(\omega t)$ ist teilweise separabel in z,t
$xy+zt$ ist nicht separabel.

Für eine allg. PDE ist es sehr unwahrscheinl., daß es separable Lsgn. gibt, aber für unsere besonders wichtigen PDEs geht das sehr oft.

Bsp: Wellengl. in 3 dim:

$$\Delta u(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(\vec{r},t) \qquad \text{in kartes. Koord.}$$

also $\left[\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right]u = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u$, $u = XYZT$.

$$\Rightarrow (\partial_x^2 X)YZT + X(\partial_y^2 Y)ZT + XY(\partial_z^2 Z)T = \frac{1}{c^2}XYZ(\partial_t^2 T).$$

$$X''YZT + XY''ZT + XYZ''T = \frac{1}{c^2}XYZT''. \qquad \Big|\cdot\frac{1}{u}=\frac{1}{XYZT}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ x}}{\frac{X''}{X}} + \underset{\substack{\uparrow\\ y}}{\frac{Y''}{Y}} + \underset{\substack{\uparrow\\ z}}{\frac{Z''}{Z}} = \underset{\substack{\uparrow\\ t}}{\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}} \qquad (*)$$

hängt nur von x, y, z, t ab.

Gleichheit gilt für alle Werte (x,y,z,t).
Das geht nur, wenn jeder Summand/Term eine Konstante ist, also gar nicht von der unabhängig. Variablen abhängt, und diese Konstanten dann $(*)$ erfüllen.
Die Konstanten seien

$$-\ell^2,\ -m^2,\ -n^2,\ -\mu^2$$

so dass offensichtlich $\boxed{-\mu^2 = -(\ell^2+m^2+n^2)}$ gelten muss.

Wir erhalten also vier unabhängige gewöhnl. Dgln:

$$\frac{X''}{X} = -l^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -m^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -n^2, \quad \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\mu^2$$

Der Zusammenhang dieser vier gewöhnl. Dgln. zur ursprünglichen PDE wird über eine <u>algebraische</u> Gl. hergestellt, die die sogenannten Separierungs/Trennungs-konstanten enthält.

Lsg:

$$\begin{cases} X(x) = A_1 e^{ilx} + B_1 e^{-ilx} \\ Y(y) = A_2 e^{imy} + B_2 e^{-imy} \\ Z(z) = A_3 e^{inz} + B_3 e^{-inz} \\ T(t) = A_4 e^{i\mu tc} + B_4 e^{-i\mu tc} \end{cases}$$

Konstanten, bestimmt durch Randbed.

oder

$$\begin{cases} X(x) = A_1' \cos(lx) + B_1' \sin(lx) \\ Y(y) = A_2' \cos(my) + B_2' \sin(my) \\ Z(z) = A_3' \cos(nz) + B_3' \sin(nz) \\ T(t) = A_4' \cos(c\mu t) + B_4' \sin(c\mu t) \end{cases}$$

z.B.

$$\left.\begin{aligned} X(x) &= e^{ilx} \\ Y(y) &= e^{imy} \\ Z(z) &= e^{inz} \\ T(t) &= e^{-ic\mu t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = e^{i(lx+my+nz-\underbrace{c\mu}_{\omega} t)} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

mit $\vec{k} = (l, m, n)$ Wellenzahlvektor

$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ = Wellenlänge.

$c\mu = \omega = 2\pi\nu$ = Kreisfrequenz

Es muß $\boxed{c^2\vec{k}^2 = \omega^2}$ gelten

<u>Supperposition</u>: Lineare PDE: Lsgn. mit verschiedenen Werten der Trennungs-Konstanten können addiert werden:

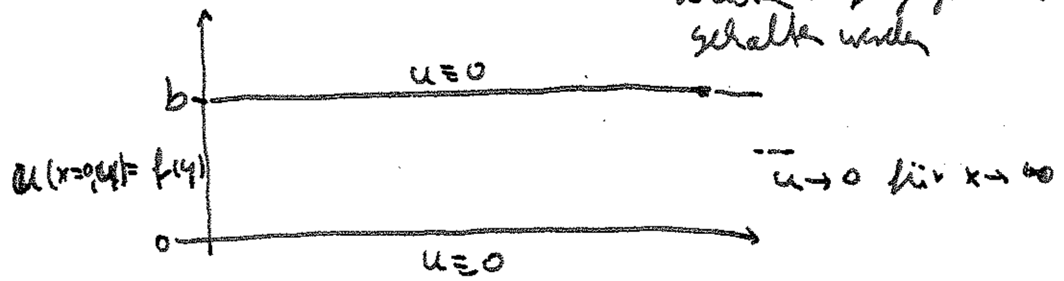
$$u_{\vec{k}}(x,y,z,t) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \quad \omega^2 = c^2\vec{k}^2, \ \omega > 0$$

$$u_{-\vec{k}'}(x,y,z,t) = e^{+i(-\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}, \quad \omega'^2 = c^2\vec{k}'^2, \ \omega' > 0.$$

$$u = \sum_{\vec{k}_i} a_{\vec{k}_i} u_{\vec{k}_i}(x,y,z,t) \quad \text{allg. Lsg.}$$

$$\ldots = \int d^3k \; a(\vec{k})\, u_{\vec{k}}(\vec{r}, t) \quad \text{wobei immer } c^2\vec{k}^2 = \omega^2 \text{ gilt.}$$

Ein weiteres Beispiel: Halb-∞ Metallplatte, deren Kante auf gegebene Temperatur gehalten werden



Gleichgewichtslsg für u ?

$$\kappa(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = \partial_t u = 0$$ da Gleichgewichtslg. heißt, dass $\dot{u} = 0$ ist.

$$\Rightarrow \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0 \quad \text{(Laplace-Gl. in 2-dim)}.$$

$$u = X(x)\,Y(y): \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

oder $X'' = \lambda^2 X, \quad Y'' = -\lambda^2 Y.$

Wird z.B. gelöst von $X = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}$

und $Y = C \cos(\lambda y) + D \sin(\lambda y)$

Mit $u(x\to\infty, y) = 0 \Rightarrow A = 0$ für $\lambda > 0$.

$u(x, y=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \underbrace{BD}\, e^{-\lambda x} \sin(\lambda y)$$
$$= B\, e^{-\lambda x} \sin(\lambda y)$$ B umdefiniert

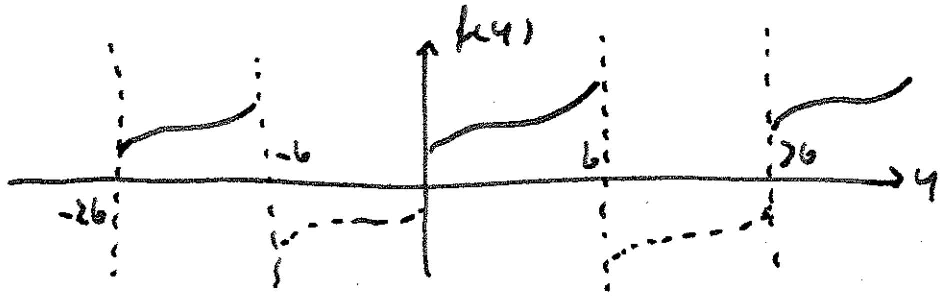
Mit $u(x, y=b) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda b) = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-n\pi x/b} \sin(n\pi y/b)$$

[Bem: $n < 0$ geht nicht da das $e^{+\alpha x}$ gibt, was Randbed für $x \to \infty$ verletzt.
$n = 0$ kann weggelassen werden, da identisch null]

$u(x=0, y) = f(y)$ ergibt: $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$ Fourier-Reihe.



period.

Fourier-Reihe geht nur, wenn f(y) als ungerade Fkt. außerhalb von $0 \le y \le b$ fortgesetzt wird. (Periode 2b)

Bem: Unstetigkeit an den Ecken $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (0,b)$ möglich, vor allem dann, wenn die lange Kante nicht auf Temp = 0 gehalten werden. Fourier-Reihe konvergiert an den Endpkten zum Mittelwert der Funktionswerte, also null.

$$\Rightarrow \quad B_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy$$

Mit $f(y) = u_0 = \text{const}$:

$$B_n = \frac{2}{b} \int_0^b u_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy$$

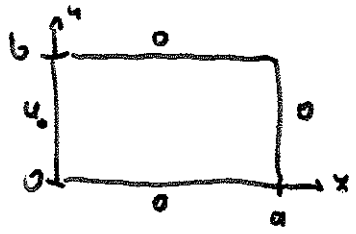
$$= -\frac{2u_0}{b} \frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \Big|_0^b$$

$$= -\frac{2u_0}{b} \frac{b}{n\pi} \left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4u_0}{n\pi} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{4u_0}{n\pi} e^{-n\pi x/b} \sin(n\pi y/b)$$

Ähnliches Problem:



$u(x=a,y)=0$ statt $u(x\to\infty,y)=0$.

führt zu

$$u(x,y)=\left[A\cosh(\lambda(a-x))+B\sinh(\lambda(a-x))\right]$$
$$\left(C\cos(\lambda y)+D\sin(\lambda y)\right)$$

statt $(Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x})(\ldots)$

und $u(a,y)=0 \Rightarrow A=0$

$u(x,0)=0=u(x,b) \Rightarrow C=0,\ \lambda=\frac{n\pi}{b}$ wie zuvor.

$$\Rightarrow u(x,y)=\sum_{n\geq 1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(a-x)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Term $n=0$ verschwindet identisch
$n<0$ geben das gleiche wie $n>0$.

Nun $u(0,y)=f(y)=u_0$

$$\Rightarrow f(y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sinh(n\pi a/b)\sin(n\pi y/b)$$

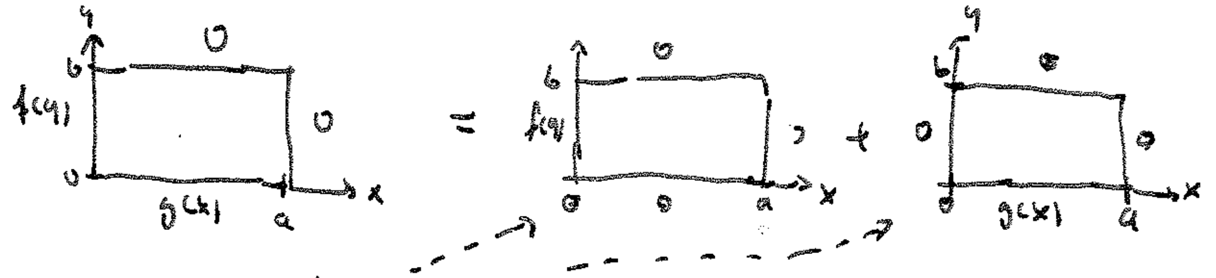
$$\Rightarrow B_n=\frac{2}{b\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\int_0^b f(y)\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)dy \qquad \Big|\ f(y)\equiv u_0$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4u_0}{n\pi\sinh\left(n\pi\frac{a}{b}\right)} & n \text{ ungerade}\\ 0 & n \text{ gerade.}\end{cases}$$

$$u(x,y)=\sum_{n\text{ ungerade}}\frac{4u_0}{n\pi\sinh\left(n\pi\frac{a}{b}\right)}\sinh\left(n\pi\frac{(a-x)}{b}\right)\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)$$

Das geht für $a\to\infty$ in die vorherige Lsg über! ✓

Nun



$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$$

$$=\sum_{n\text{ odd}}B_n\sinh\left[\frac{n\pi(a-x)}{b}\right]\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)+\sum_{n\text{ odd}}C_n\sinh\left[\frac{n\pi(b-y)}{a}\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$C_n=\frac{2}{a\sinh\left(n\pi b/a\right)}\int_0^a g(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right)dx$$

analog zu B_n

Bem: $\left[\ w \,\hat{=}\, v(x\leftrightarrow y,\ b\leftrightarrow a)\ \right]$